Géométrie dans l'espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Exercice 1 :

1) Donner l'équation cartésienne du plan (P) passant par $A(2;3;0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1;-1;1)$

2) Trouver une représentation paramétrique de la droite (D) passant par $B(-1;1;2)$ et perpendiculaire au plan (P)

3) Déterminer : $(P)\cap(D)$

Exercice 2 : $A(2;-1;0)$ un point et (P) le plan d'équation :

$$2x-y+z=0$$

1) Calculer $d(A,(P))$

2) Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et orthogonale au plan (P) ; puis en déduire les coordonnées de H le projeté orthogonal de A sur le plan (P)

3) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) passant par A et parallèle au plan (P)

Exercice 3 : $A(1;1;-1)$ et $B(-1;1;3)$ deux points

1) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S_1) de centre A et de rayon 2

2)a) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S_2) de diamètre $[AB]$

b) Donner le centre Ω et le rayon R de la sphère (S_2)

3) Soit (P) le plan d'équation : $x+z-4=0$;

Vq : $H\left(\frac{3}{2};1;\frac{5}{2}\right)$ est le projeté orthogonal de Ω sur (P)

4) Mq : le plan (P) coupe la sphère (S_2) selon un cercle en déterminant son centre et son rayon

Exercice 4 : $A(1;-1;3)$ un point et (P) le plan d'équation :

$$x-y+3z=0$$

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (OA)

2) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) orthogonal à (OA) en A

3) Vérifier que : $(P)\ //\ (Q)$

4) Soit (S) la sphère tangente au plan (Q) en A ; et coupant le plan (P) suivant un cercle (Γ) de centre O et de rayon $\sqrt{33}$

a) Mq : $\Omega(a;b;c)$ le centre de (S) appartient à (OA)

b) Déduire que : $c=3a$; $b=-a$

c) Mq : $\Omega A^2-\Omega O^2=33$ et déduire $a-b+3c=-11$

d) Déduire Ω et Mq le rayon de (S) est $2\sqrt{11}$

Exercice 5 : Soit (S) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ qui vérifient :

$$x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0$$

1) Mq (S) est une sphère de centre $\Omega(0;2;-1)$ et de rayon $\sqrt{3}$

2) Vq : $A(-1;1;0)\in(S)$

3) Donner une équation cartésienne du plan (P) tangent à la sphère (S) en A

4) Donner une équation cartésienne du plan (Q) passant par $B(1;3;-2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1;1;1)$

5) Mq le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant un cercle en déterminant son centre et son rayon

6) Soit (D) la droite définie par : $\begin{cases}x=1+2t\\y=3+2t\\z=0\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

Mq : la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points différents à déterminer

Exercice 6 : $A(1;1;1)$ et $B(3;1;0)$ et $C(-1;0;1)$ trois points ; et soit (S) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ qui vérifient :

$$x^2+y^2+z^2-6x+4z+9=0$$

1) Mq (S) est une sphère en déterminant son centre Ω et son rayon R

2)a) Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ puis déduire que les points $A;B;C$ ne sont pas alignés et calculer l'aire du parallélogramme $ABCD$

b) Donner l'équation cartésienne du plan (ABC)

c) Mq : le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle en déterminant son centre et son rayon

3) Vq : $E(3;0;0)\in(S)$ et trouver une équation cartésienne du plan (P) tangent à la sphère (S) en E

4) Donner une représentation paramétrique de la droite (D) intersection des deux plans (P) et (ABC) (Rq : $B\in(P)$)

5) Soit (S') la sphère de centre Ω' appartenant au plan $(Q): x+y+z=0$; et tangente au plan (ABC) en A

Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S')

Exercice 7 : $A(1;2;1)$ et $B(1;3;1)$ deux points

1) Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$; puis donner une équation cartésienne du plan (OAB)

2) Donner une équation cartésienne de la sphère (S) de centre $\Omega(-3,0,1)$ et tangente au plan (OAB)

3) Trouver le point de tangence de (S) et du plan (OAB)

4) Mq : la droite (D) passant par $H(-1;0;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2;5;2)$; est tangent à la sphère (S)

Exercice 8 : $A(1;2;3)$ et $B(2;1;3)$ et $C(2;-2;0)$ et $D(2;0;2)$ et $E(-4;6;2)$ cinq points ; et soit (S) la sphère définie par :

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-8z+14=0$$

1)a) Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ puis déduire l'aire du triangle ABC

b) Donner l'équation cartésienne du plan (ABC)

2) Donner une représentation paramétrique de la droite (DE)

3) Mq : (S) est une sphère de centre $\Omega(1;1;4)$ et de rayon 2

4) Mq : (DE) est tangente à (S) en un point H à déterminer

5) Mq le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle en déterminant son centre et son rayon

Exercice 9 : $A(2;-1;1)$ et $B(2;3;-1)$ et $C(1;1;1)$ trois points

1) Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}$ puis déduire $d(A;(BC))$

2) Mq : $H\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal de A sur (BC)

3) Donner une équation cartésienne de la sphère (S) de diamètre $[AB]$

FB: révision bac science 2020 TM

Scanned by DocumentScanner | Lufick

Géométrie dans l'espace

Exercice 10 : $A(-2;0;0)$ et $B(0;1;0)$ et $C(0;0;-1)$ trois points ; et soit (S) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ qui vérifient :

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0$$

1) Mq (S) est une sphère de centre $\Omega(1;-2;-2)$ et de rayon 2

2)a) Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ puis déduire l'aire du triangle ABC

b) Donner l'équation cartésienne du plan (ABC)

3)a) Calculer : $d(\Omega;(ABC))$

b) Déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle en déterminant son centre et son rayon

4)a) Vq : les points $\Omega;A;B;C$ ne sont pas coplanaires

b) Calculer le volume du tétraèdre ΩABC

Exercice 11 : $A(1;-2;2)$ un point ; (P) le plan défini par : $(P):y-z=0$; et (S) la sphère définie par :

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$$

1) Mq $\Omega(1;1;1)$ est le centre de (S) et 2 est son rayon

2) Calculer : $d(\Omega;(P))$. puis Déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) en déterminant son centre et son rayon

3) Soit (D) la droite passant par A et orthogonale à (P)

a) Mq : $\vec{u}(0;1;-1)$ est un vecteur directeur de (D)

b) Vq : $\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{2}\|\vec{u}\|$

c) Déduire que la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points qu'on déterminera

Exercice 12 : $A(1;1;0)$ et $B(1;-1;1)$ et $C(0;1;1)$ trois points ; ; (P) le plan défini par : $(P):x+2y-2z+1=0$; et (S) la sphère définie par : $x^2+y^2+z^2-4x-2y-2z+\frac{38}{9}=0$

1)a) Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ puis déduire que les points $A;B;C$ ne sont pas alignés

b) Donner l'équation cartésienne du plan (ABC)

c) Vq : $(P)\perp(ABC)$

d) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) intersection des deux plans $(P)et\ (ABC)$

2) Mq $\Omega(2;1;1)$ est le centre de (S) et $\frac{4}{3}$ est son rayon

3) Calculer : $d(\Omega;(P))$. puis Déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) en déterminant son centre et son rayon

4)a) Calculer : $d(\Omega;(ABC))$. puis Déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

b) Donner l'équation cartésienne du plan (Q) tangent à la sphère (S) et strictement parallèle à (ABC)

session normale 2019

$A(1;-1;-1)$ et $B(0;-2;1)$ et $C(1;-2;0)$ trois points ;

1)a) Mq : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$

b) En déduire que $x+y+z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2) Soit (S) la sphère d'équation :

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$$

Mq le centre de la sphère (S) est $\Omega(2;-1;1)$ et que son rayon est $R=\sqrt{5}$

3)a)Calculer $d(\Omega;(ABC))$

b) En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) (sans déterminer son centre et son rayon)

Session rattrapage 2018

Soit (S) la sphère de centre $\Omega(2;1;2)$ et de rayon 3 ; et (P) le plan passant par $A(-1;0;3)$ et de vecteur normal $\vec{u}(4;0;-3)$

1)Mq : $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$ est une équation de (S)

2) Vq : $4x-3z+13=0$ est une équation du plan (P)

3)a) Vq : $\begin{cases}x=2+4t\\y=1\\z=2-3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω est orthogonale au plan (P)

b) Mq :le plan (P) est tangent à la sphère (S) en un point H qu'on déterminera

Session normale 2017

Soit (S) la sphère de centre $\Omega(0;1;-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$; et (P) le plan passant par $A(0;1;1)$ et de vecteur normal $\vec{u}(1;0;-1)$

1)a) Vq : $x-z+1=0$ est une équation du plan (P)

b) Mq : le plan (P) est tangent à la sphère (S) en $B(-1;1;0)$

2)a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A est orthogonale au plan (P)

b) Mq : la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en $C(1;1;0)$

3) Mq : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$ et déduire l'aire du triangle (OBC)

FB: révision bac science 2020

Scanned by DocumentScanner | Lufick

Exercice 1 :

1) Equation cartésienne du plan (P) :

Puisque $\vec{n}(1;-1;1) \perp (P)$ alors l'équation cartésienne de (P) s'écrit sous la forme suivante : $x - y + z + c = 0$

Or $A(2;3;0) \in (P) \Rightarrow x_A - y_A + z_A + c = 0$

$\Rightarrow 2 - 3 + 0 + c = 0 \Rightarrow -1 + c = 0 \Rightarrow c = 1$

Donc : $\boxed{(P): x - y + z + 1 = 0}$

2) Représentation paramétrique de la droite (D) :

Puisque $(D) \perp (P)$ alors $\vec{n}(1;-1;1)$ le vecteur normal à (P) est aussi le vecteur directeur de la droite (D) ;

d'autre part on a $B(-1;1;2) \in (D)$ donc la représentation paramétrique de (D) est la suivante : $\boxed{(D): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})}$

3) Déterminons $(P) \cap (D)$:

Pour trouver cette intersection ; on résout le système suivant :

$$\begin{cases} x = -1 + t & (1) \\ y = 1 - t & (2) \\ z = 2 + t & (3) \\ x - y + z + 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

Dans la relation (4) on remplace x et y et z par les relations (1) et (2) et (3) ainsi on obtient l'équation :

$(-1 + t) - (1 - t) + (2 + t) + 1 = 0 \Rightarrow -1 + t - 1 + t + 2 + t + 1 = 0$

$\Rightarrow 3t + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$

Ainsi : $x = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$ et $y = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ et $z = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

D'où : $\boxed{(P) \cap (D) = \left\{H\left(\frac{-4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)\right\}}$

Exercice 2 :

1) Calculons $d(A;(P))$:

On a : $(P): 2x - y + z = 0$ et $A(2;-1;0)$

Donc : $d(A;(P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2\times 2 - (-1) + 0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$

2) Représentation paramétrique de la droite (D) :

Puisque $(D) \perp (P)$ alors $\vec{n}(2;-1;1)$ le vecteur normal à (P) est aussi le vecteur directeur de la droite (D) ; d'autre part on a $A(2;-1;0) \in (D)$ donc la représentation paramétrique de (D) est la suivante :

$$\boxed{(D): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})}$$

Les coordonnées de H :

Puisque le point H est le projeté orthogonal de A sur le plan (P) ; alors ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t & (1) \\ y = -1 - t & (2) \\ z = t & (3) \\ 2x - y + z = 0 & (4) \end{cases}$$

Dans la relation (4) on remplace x et y et z par les relations (1) et (2) et (3) ainsi on obtient l'équation :

$2(2 + 2t) - (-1 - t) + t = 0 \Rightarrow 4 + 4t + 1 + t + t = 0$

$\Rightarrow 6t + 5 = 0 \Rightarrow t = -\frac{5}{6}$

Ainsi : $x = 2 - 2\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{3}$ et $y = -1 + \frac{5}{6} = \frac{-1}{6}$ et $z = \frac{-5}{6}$

D'où : $\boxed{H\left(\frac{1}{3}; \frac{-1}{6}; \frac{-5}{6}\right)}$

3) Equation cartésienne du plan (Q) :

Puisque $(Q) \parallel (P)$ alors $\vec{n}(2;-1;1)$ le vecteur normal à (P) est aussi normal à (Q) ; donc l'équation cartésienne de (Q) s'écrit sous la forme suivante : $2x - y + z + c = 0$

Or $A(2;-1;0) \in (Q) \Rightarrow 2x_A - y_A + z_A + c = 0$

$\Rightarrow 2 \times 2 - (-1) + 0 + c = 0 \Rightarrow 5 + c = 0 \Rightarrow c = -5$

Donc : $\boxed{(Q): 2x - y + z - 5 = 0}$

Exercice 3 :

1) Equation cartésienne de la sphère (S_1) de centre $A(1;1;-1)$ et de rayon 2 :

$M(x;y;z) \in (S_1) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 2z + 1 = 4$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z - 1 = 0$

Donc : $\boxed{(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z - 1 = 0}$

2) a) Equation cartésienne de la sphère (S_2) de diamètre $[AB]$:

$M(x;y;z) \in (S_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z-3 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) + (y-1)^2 + (z+1)(z-3) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 3z + z - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 3 = 0$

Donc : $\boxed{(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 3 = 0}$

b) Centre et rayon de la sphère (S_2) :

On a : $M(x;y;z) \in (S_2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + z^2 - 2z = 3$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = 3 + 1 + 1$

$\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$

Ainsi $\boldsymbol{\Omega(0;1;1)}$ est le centre de (S_2) et $\boldsymbol{R = \sqrt{5}}$ est son rayon.

Remarque : il existe une autre façon de faire ; il suffit de remarquer que Ω est le milieu de $[AB]$ et que $R = \frac{AB}{2}$

3) Vq : $H\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{5}{2}\right)$ est le projeté orthogonal de Ω sur (P) :

Puisque H est le projeté orthogonal de Ω sur (P) donc ses coordonnées sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x = t & (1) \\ y = 1 & (2) \\ z = 1 + t & (3) \\ x + z - 4 = 0 & (4) \end{cases}$$

Dans la relation (4) on remplace x et y et z par les relations (1) et (2) et (3) ainsi on obtient l'équation :

$t + 1 + t - 4 = 0 \Rightarrow 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$

Ainsi : $x = \frac{3}{2}$ et $y = 1$ et $z = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

D'où : $\boxed{H\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{5}{2}\right)}$ est le projeté orthogonal de Ω sur (P).

4) Mq : le plan (P) coupe la sphère (S_2) selon un cercle :

On a :

$d(\Omega;(P)) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|0+1-4|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} < R = \sqrt{5}$

Donc le plan (P) coupe la sphère (S_2) selon un cercle de centre $H\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{5}{2}\right)$ qui est le projeté orthogonal de Ω sur (P) et de rayon : $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5 - \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

FB: révision bac science 2020

Scanned by DocumentScanner | Lufick

Exercice 4 :

1) Représentation paramétrique de la droite (OA) :

Le vecteur $\overrightarrow{OA}(1;-1;3)$ (car $O(0;0;0)$ et $A(1;-1;3)$) est un vecteur directeur de (OA) ; En remarquant que cette droite passe par le point O donc sa représentation paramétrique est la suivante :

$$\boxed{(OA):\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})}$$

2) Equation cartésienne du plan (Q) :

Puisque $(OA)\perp(Q)$ alors Le vecteur $\overrightarrow{OA}(1;-1;3)$ est normal à (Q) donc l'équation cartésienne de (Q) s'écrit sous la forme suivante :

$$x-y+3z+c=0$$

Or $A(1;-1;3)\in(Q)\Rightarrow x_A-y_A+3z_A+c=0$

$$\Rightarrow 1-(-1)+3\times 3+c=0\Rightarrow 11+c=0\Rightarrow c=-11$$

Donc : $\boxed{(Q):x-y+3z-11=0}$

3) Vérifier que : $(P)\ //\ (Q)$:

On a : $(P):x-y+3z=0$ donc $\vec{n}(1;-1;3)=\overrightarrow{OA}$ est un vecteur normal à (P) ainsi les deux plans ont le même vecteur normal ce qui signifie que : $(P)\ //\ (Q)$

4) a) Mq : $\Omega(a;b;c)$ le centre de (S) appartient à (OA) :

Puisque le plan (Q) est tangent à la sphère (S) en A ; alors le point A est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (Q) ; ainsi Ω appartient à la droite passant par A est perpendiculaire au plan (Q) ; On sait que la droite (OA) vérifie ces conditions donc :

$$\boxed{\Omega\in(OA)}$$

b) Déduire que : $c=3a$; $b=-a$

On a : $\Omega(a;b;c)\in(OA)$ donc ces coordonnées vérifient la représentation paramétrique de (OA) ce qui donne :

$$\begin{cases} a=t \\ b=-t \\ c=3t \end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases} b=-a \\ c=3a \end{cases}}$$

c) Mq : $\Omega A^2-\Omega O^2=33$

On a le plan (Q) est tangent à la sphère (S) en A ; alors : $\Omega A=R$ avec R est le rayon de la sphère (S).

D'autre part le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de centre O (le point O est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (P)) et de rayon $r=\sqrt{33}$ donc : $d=d(\Omega;(P))=OA$

Or : $r=\sqrt{R^2-d^2}\Rightarrow r^2=R^2-d^2\Rightarrow\sqrt{33}^2=\Omega A^2-\Omega O^2$

D'où : $\boxed{\Omega A^2-\Omega O^2=33}$

Déduire que : $a-b+3c=-11$:

On a $\Omega(a;b;c)$ et $A(1;-1;3)$ et $O(0;0;0)$ donc :

$$\Omega A^2-\Omega O^2=33$$

$$\Rightarrow[(a-1)^2+(b+1)^2+(c-3)^2]-[a^2+b^2+c^2]=33$$

$$\Rightarrow a^2-2a+1+b^2+2b+1+c^2-6c+9-a^2-b^2-c^2=33$$

$$\Rightarrow -2a+2b-6c=33-11\Rightarrow -2(a-b+3c)=22$$

Ainsi : $\boxed{a-b+3c=-11}$

d) Déduire les coordonnées de Ω :

D'après ce qui précède on a :

$$\begin{cases} b=-a \\ c=3a \\ a-b+3c=-11 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=-a \\ c=3a \\ a+a+9a=-11 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=-a \\ c=3a \\ 11a=-11 \end{cases}$$

Donc : $\begin{cases} b=1 \\ c=-3 \\ a=-1 \end{cases}$ ainsi : $\boxed{\Omega(-1;1;-3)}$

Mq : $R=2\sqrt{11}$:

On a : $R=\Omega A=\sqrt{(-1-1)^2+(1+1)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{44}$

D'où : $\boxed{R=2\sqrt{11}}$

Exercice 5 :

1) Mq (S) est une sphère de centre $\Omega(0;2;-1)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$:

On a : $(S):x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-4y+z^2+2z+2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4-4+z^2+2z+1-1+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3=\sqrt{3}^2$$

Donc (S) **est une sphère de centre $\Omega(0;2;-1)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$**

2) Vq : $A(-1;1;0)\in(S)$:

On a :

$$x_A{}^2+y_A{}^2+z_A{}^2-4y_A+2z_A+2=1+1+0-4+0+2=0$$

Donc : $\boxed{A(-1;1;0)\in(S)}$

3) Equation cartésienne du plan (P) tangent à la sphère (S) en A :

Puisque le plan (P) est tangent à la sphère (S) en A ; alors $\overrightarrow{\Omega A}$ ou $\overrightarrow{A\Omega}$ est un vecteur normal à (P).

$\Omega(0;2;-1)$ et $A(-1;1;0)\Rightarrow\overrightarrow{A\Omega}(1;1;-1)$

Donc l'équation cartésienne de (P) s'écrit sous la forme suivante :

$$x+y-z+c=0$$

Or $A(-1;1;0)\in(P)\Rightarrow x_A+y_A-z_A+c=0$

$$\Rightarrow -1+1-0+c=0\Rightarrow c=0$$

Donc : $\boxed{(P):x+y-z=0}$

4) Equation cartésienne du plan (Q) :

Puisque $\vec{n}(1;1;1)\perp(Q)$ donc l'équation cartésienne de (Q) s'écrit sous la forme suivante : $x+y+z+c=0$

Or $B(1;3;-2)\in(Q)\Rightarrow x_B+y_B+z_B+c=0$

$$\Rightarrow 1+3-2+c=0\Rightarrow c=-2$$

Donc : $\boxed{(Q):x+y+z-2=0}$

5) Mq le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant un cercle :

On a : $d(\Omega;(Q))=\frac{|x_\Omega+y_\Omega+z_\Omega-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|0+2-1-2|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}<\sqrt{3}=R$

Donc le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C).

Déterminons le rayon et le centre de (C) :

Le centre est le projeté orthogonal de Ω sur (Q) donc ses coordonnées sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x=t & (1) \\ y=2+t & (2) \\ z=-1+t & (3) \\ x+y+z-2=0 & (4) \end{cases}$$

Dans la relation (4) on remplace x et y et z par les relations (1) et (2) et (3) ainsi on obtient l'équation :

$$t+2+t-1+t-2=0\Rightarrow 3t-1=0\Rightarrow t=\frac{1}{3}$$

Ainsi : $x=\frac{1}{3}$ et $y=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ et $z=-1+\frac{1}{3}=\frac{-2}{3}$

D'où : $\boxed{H\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3};\frac{-2}{3}\right)}$ est le centre du cercle (C).

Le rayon est : $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{3-\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

6) Mq : la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points différents :

Pour cela on résout un système qui contient la représentation paramétrique de la droite (D) et l'équation cartésienne de la sphère (S)

FB: révision bac science 2020

Scanned by DocumentScanner | Lufick

$$\begin{cases} x = 1 + 2t & (1) \\ y = 3 + 2t & (2) \\ z = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z + 2 = 0 & (4) \end{cases}$$

Dans la relation (4) on remplace x et y et z par les relations (1) et (2) et (3) ainsi on obtient l'équation :

$(1+2t)^2 + (3+2t)^2 + 0^2 - 4(3+2t) + 2\times 0 + 2 = 0$
$\Rightarrow 1 + 4t + 4t^2 + 9 + 12t + 4t^2 - 12 - 8t + 2 = 0$
$\Rightarrow 8t^2 + 8t = 0 \Rightarrow 8t(t+1) = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = -1$

Ainsi le système a deux solutions :

Pour $t = 0$: $x = 1$ et $y = 3$ et $z = 0$

Et pour $t = -1$: $x = -1$ et $y = 1$ et $z = 0$

D'où : $\boxed{(S) \cap (D) = \{E(1;3;0)\,;F(-1;1;0)\}}$

Exercice 7 :

1) Calcul de $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$; Equation cartésienne du plan (OAB)

On a $A(1;2;1)$ et $B(1;3;1)$ donc : $\overrightarrow{OA}(1;2;1)$ et $\overrightarrow{OB}(1;3;1)$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= -\vec{i} + \vec{k}$$

Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\ (-1;0;1)}$

Puisque : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ alors O et A et B ne sont pas alignés donc ils forment un plan (OAB) qui admet $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ comme vecteur normal

Ainsi : $(OAB): -x + z + c = 0$

Or $O(0;0;0) \in (OAB) \Rightarrow -0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

D'où : $\boxed{(OAB): -x + z = 0}$

2) Equation cartésienne de la sphère (S) :

Cherchons le rayon de la sphère(S). On a le plan (OAB) est tangent à la sphère (S) donc son rayon est :

$$R = d\left(\Omega\,;(OAB)\right) = \frac{|-x_\Omega + z_\Omega|}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}} = \frac{|-(-3)+1|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Soit : $M(x;y;z) \in (S) \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = (2\sqrt{2})^2$
$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 8$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2z + 2 = 0$

Donc : $\boxed{(S): x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2z + 2 = 0}$

3) Le point de tangence de (S) et du plan (OAB)

Le point de tangence de (S) et du plan (OAB) est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (OAB) ; pour le trouver on résout le système suivant :

$$\begin{cases} x = -3 - t & (1) \\ y = 0 & (2) \\ z = 1 + t & (3) \\ -x + z = 0 & (4) \end{cases}$$

Dans la relation (4) on remplace x et y et z par les relations (1) et (2) et (3) ainsi on obtient l'équation :

$3 + t + 1 + t = 0 \Rightarrow 2t + 4 = 0 \Rightarrow t = -2$

Ainsi : $x = -3 + 2 = -1$ et $y = 0$ et $z = 1 - 2 = -1$

D'où : $\boxed{H(-1;0;-1)}$ est le point de contact entre d (S) et (OAB).

4) Mq la droite (D) est tangente à la sphère (S) :

On a la droite (D) passe par $H(-1;0;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2;5;2)$; donc : $d(\Omega;(D)) = \frac{\|\overrightarrow{\Omega H} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

Calculons $\overrightarrow{\Omega H} \wedge \vec{u}$:

$$\overrightarrow{\Omega H} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 5\\-2 & 2\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}2 & 2\\-2 & 2\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}2 & 2\\0 & 5\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= 10\vec{i} - 8\vec{j} + 10\vec{k}$$

Donc : $d(\Omega;(D)) = \frac{\sqrt{10^2+(-8)^2+10^2}}{\sqrt{2^2+5^2+2^2}} = \frac{\sqrt{264}}{\sqrt{33}} = 2\sqrt{2} = R$

Ainsi la droite (D) est tangente à la sphère (S) en H (car $H \in (S)$ et $H \in (D)$)

Exercice 8 :

1) a) Calculons $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ puis déduire l'aire du triangle ABC

On a $A(1;2;3)$ et $B(2;1;3)$ et $C(2;-2;0)$ donc :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-4\\-3\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}-1 & -4\\0 & -3\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1 & 1\\0 & -3\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1 & 1\\-1 & -4\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$$

Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\ (3;3;-3)}$

L'aire du triangle ABC est :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + (-3)^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

b) Equation cartésienne du plan (ABC) :

Puisque : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$; alors le plan (ABC) admet $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ comme vecteur normal ; Ainsi : $(ABC): 3x + 3y - 3z + c = 0$

Or $A(1;2;3) \in (ABC) \Rightarrow 3 + 6 - 9 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

D'où : $\boxed{(ABC): 3x + 3y - 3z = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0}$

2) Représentation paramétrique de la droite (DE) :

Le vecteur $\overrightarrow{DE}(-6;6;0)$ (car $D(2;0;2)$ et $E(-4;6;2)$) est un vecteur directeur de la droite (DE) ; En remarquant que cette droite passe par le point D donc sa représentation paramétrique est la suivante : $\boxed{(DE): \begin{cases} x = 2 - 6t \\ y = 6t \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})}$

3) Mq (S) est une sphère de centre $\Omega(1;1;4)$ et de rayon $R = 2$:

On a : $(S): x^2 + y^2 + z^2 - -2x - 2y - 8z + 14 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 8z + 14 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 2y + 1 - 1 + z^2 - 8z + 16 - 16 + 14 = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 4 = 2^2$

Donc (S) est une sphère de centre $\Omega(1;1;4)$ et de rayon $R = 2$

4) Mq (DE) est tangente à (S) en un point H à déterminer :

Pour cela on résout directement le système suivant :

$$\begin{cases} x = 2 - 6t & (1) \\ y = 6t & (2) \\ z = 2 & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 8z + 14 = 0 & (4) \end{cases}$$

Dans la relation (4) on remplace x et y et z par les relations (1) et (2) et (3) ainsi on obtient l'équation :

$(2-6t)^2 + (6t)^2 + 2^2 - 2(2-6t) - 2(6t) - 8\times 2 + 14 = 0$
$\Rightarrow 4 - 24t + 36t^2 + 36t^2 + 4 - 4 + 12t - 12t - 16 + 14 = 0$
$\Rightarrow 72t^2 - 24t + 2 = 0 \Rightarrow 2(36t^2 - 12t + 1) = 0$
$\Rightarrow 2(6t-1)^2 = 0 \Rightarrow 6t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{6}$

Ainsi le système a une seule solution : $x = 1$ et $y = 1$ et $z = 2$

D'où (DE) est tangente à (S) en $H(1;1;2)$

5) Mq le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle en déterminant son centre et son rayon :

On a : $(ABC): x + y - z = 0$ et $\Omega(1;1;4)$ et de rayon $R = 2$

Donc : $d = d\left(\Omega;(ABC)\right) = \frac{|1+1-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|-2|}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} < R = 2$

Alors le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) de centre H' et de rayon $\boxed{r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}}$

FB: révision bac science 2020

Scanned by DocumentScanner | Lufick

Les coordonnées de H' :

Le point H' est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (ABC) ; alors ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x = 1+t & (1) \\ y = 1+t & (2) \\ z = 4-t & (3) \\ x+y-z = 0 & (4) \end{cases}$$

Dans la relation (4) on remplace x et y et z par les relations (1) et (2) et (3) ainsi on obtient l'équation :

$1+t+1+t-4+t=0 \Rightarrow 3t-2=0 \Rightarrow t=\frac{2}{3}$

Ainsi : $x=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$ et $y=\frac{5}{3}$ et $z=4-\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$

D'où : $\boxed{H'\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)}$

Exercice 10 :

1) Mq (S) est une sphère de centre $\Omega(1;-2;-2)$ et de rayon 2 :

On a : $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+4y+z^2+4z+5=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1-1+y^2+4y+4-4+z^2+4z+4-4+5=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=4=2^2$

Donc **(S) est une sphère de centre $\Omega(1;-2;-2)$ et de rayon $R=2$**

2) a) Calculons $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ puis déduire l'aire du triangle ABC

On a : $A(-2;0;0)$ et $B(0;1;0)$ et $C(0;0;-1)$ donc :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}2&2\\0&-1\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}2&2\\1&0\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-2\vec{k}$$

Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\ (-1;2;-2)}$

L'aire du triangle ABC est :

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=\frac{\sqrt{9}}{2}=\frac{3}{2}$$

b) Equation cartésienne du plan (ABC) :

Puisque : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$; alors le plan (ABC) admet $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ comme vecteur normal ; Ainsi : $(ABC): -x+2y-2z+c=0$

Or $A(-2;0;0)\in(ABC)\Rightarrow 2+c=0\Rightarrow c=-2$

D'où : $\boxed{(ABC): -x+2y-2z-2=0\Leftrightarrow x-2y+2z+2=0}$

3) a) Calculons $d(\Omega;(ABC))$:

On a : $d=d(\Omega;(ABC))=\frac{|1+4-4+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{|3|}{3}=1$

b) Déduction :

On a : $d=1<R=2$; Alors le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C)) de centre H et de rayon

$$\boxed{r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}}$$

Les coordonnées de H :

Le point H est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (ABC) ; alors ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x = 1+t & (1) \\ y = -2-2t & (2) \\ z = -2+2t & (3) \\ x-2y+2z+2=0 & (4) \end{cases}$$

Dans la relation (4) on remplace x et y et z par les relations (1) et (2) et (3) ainsi on obtient l'équation :

$1+t+4+4t-4+4t+2=0\Rightarrow 9t+3=0\Rightarrow t=\frac{-1}{3}$

Ainsi : $x=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ et $y=-2+\frac{2}{3}=\frac{-4}{3}$ et $z=-2-\frac{2}{3}=\frac{-8}{3}$

D'où : $\boxed{H\left(\frac{2}{3};\frac{-4}{3};\frac{-8}{3}\right)}$

4) a) Vq les points $\Omega; A; B; C$ ne sont pas coplanaires :

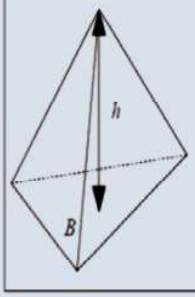
Il suffit de montrer que $\Omega\notin(ABC)$ autrement dit ses coordonnées ne vérifient pas l'équation cartésienne du plan (ABC).

On a : $x_\Omega-2y_\Omega+2z_\Omega+2=1+4-4+2=3\neq 0$

Donc $\Omega\notin(ABC)$; ainsi **les points $\Omega; A; B; C$ ne sont pas coplanaires**

b) Calcul du volume du tétraèdre ΩABC :

Rappel



Le volume d'un tétraèdre (pyramide à base triangulaire) est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

$$V=\frac{1}{3}\times B\times h$$

La base est l'une des 4 faces triangulaires.

La hauteur est la distance entre le sommet qui n'est pas sur la base et la base ; la hauteur est donc la longueur du segment joignant le sommet qui n'est pas sur la base à sa projection orthogonale sur la base.

En se basant sur ce rappel on a :

$$V_{\Omega ABC}=\frac{1}{3}\times S_{ABC}\times d(\Omega;(ABC))=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

Exercice 12.

1) b) Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$:

On a : $A(1;1;0)$ et $B(1;-1;1)$ et $C(0;1;1)$ donc :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-2&0\\1&1\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}0&-1\\1&1\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}0&-1\\-2&0\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-2\vec{\imath}-\vec{\jmath}-2\vec{k}$$

Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\ (-2;-1;-2)}$

Puisque $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$; alors les points A et B et C ne sont pas alignés.

b) Equation cartésienne du plan (ABC) :

Puisque $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à (ABC) ; donc :

$(ABC): -2x-y-2z+c=0$

Or $A(1;1;0)\in(ABC)\Rightarrow -3+c=0\Rightarrow c=3$

D'où : $\boxed{(ABC): -2x-y-2z+3=0\Leftrightarrow 2x+y+2z-3=0}$

c) Vq : $(P)\perp(ABC)$:

On a $(ABC): 2x+y+2z-3=0$ et $(P): x+2y-2z+1=0$

Donc $\vec{n}(2;1;2)\perp(ABC)$ et $\vec{n}'(1;2;-2)\perp(P)$

D'autre part : $\vec{n}.\vec{n}'=2\times1+1\times2+2\times(-2)=4-4=0$

D'où : $\boxed{(P)\perp(ABC)}$

d) Equation cartésienne de la droite $(\Delta)=(ABC)\cap(P)$:

• **Première méthode :**

On cherche un point d'intersection entre les deux plans et on prend $\vec{n}\wedge\vec{n}'$ comme vecteur directeur de la droite (Δ).

Pour trouver un point d'intersection ; on pose par exemple $z=0$ dans les équations des deux plans et on résout le système :

$$\begin{cases}2x+y-3=0\\x+2y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=3\\x+2y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{7}{3}\\y=-\frac{5}{3}\end{cases}$$

Ainsi $E\left(\frac{7}{3};\frac{-5}{3};0\right)\in(ABC)\cap(P)$

Maintenant on calcule $\vec{n}\wedge\vec{n}'$:

$$\vec{n}\wedge\vec{n}'=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\2&-2\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}2&1\\2&-2\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-6\vec{\imath}+6\vec{\jmath}+3\vec{k}$$

FB: révision bac science 2020

Scanned by DocumentScanner | Lufick

Donc : $\boxed{(\Delta):\begin{cases} x=\frac{7}{3}-6t \\ y=-\frac{5}{3}+6t \\ z=3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})}$

•Deuxième méthode :

On pose $z=t$ dans les équations des deux plans et on essaye d'exprimer x et y en fonction de t ; autrement dit on résout le système suivant tel que le paramètre t est supposé un nombre fixe :

$$\begin{cases} 2x+y+2t-3=0 \\ x+2y-2t+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=-2t+3 \\ x+2y=2t-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2y+2t-1)+y=-2t+3 \\ x=-2y+2t-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4y+4t-2+y=-2t+3 \\ x=-2y+2t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y=-6t+5 \\ x=-2y+2t-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2t-\frac{5}{3} \\ x=-2y+2t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2t-\frac{5}{3} \\ x=-2(2t-\frac{5}{3})+2t-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2t-\frac{5}{3} \\ x=-4t+\frac{10}{3}+2t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2t-\frac{5}{3} \\ x=-2t+\frac{7}{3} \end{cases}$$

Ainsi la représentation de (Δ) est :

$$\boxed{(\Delta):\begin{cases} x=\frac{7}{3}-2t \\ y=-\frac{5}{3}+2t \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})}$$

Remarque : Une droite a une infinité de représentation paramétrique qui différent selon son vecteur directeur et le point choisi.

2) Mq $\Omega(2;1;1)$ est le centre de (S) et $\frac{4}{3}$ est son rayon :

On a : $(S): x^2+y^2+z^2-4x-2y-2z+\frac{38}{9}=0$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+y^2-2y+z^2-2z+\frac{38}{9}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+4-4+y^2-2y+1-1+z^2-2z+1-1+\frac{38}{9}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6-\frac{38}{9}=\frac{16}{9}=\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Donc **(S) est une sphère de centre $\Omega(2;1;1)$ et de rayon $R=\frac{4}{3}$**

3) Calculons $d(\Omega;(P))$:

On a : $d=d(\Omega;(P))=\frac{|2+2-2+1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|3|}{3}=1$

Déduction :

On a : $d=1<R=\frac{4}{3}$; Alors le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) de centre H et de rayon

$$\boxed{r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\frac{16}{9}-1}=\frac{\sqrt{7}}{3}}$$

Les coordonnées de H :

Le point H est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (P) ; alors ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x=2+t & (1) \\ y=1+2t & (2) \\ z=1-2t & (3) \\ x+2y-2z+1=0 & (4) \end{cases}$$

Dans la relation (4) on remplace x et y et z par les relations (1) et (2) et (3) ainsi on obtient l'équation :

$$2+t+2+4t-2+4t+1=0 \Rightarrow 9t+3=0 \Rightarrow t=\frac{-1}{3}$$

Ainsi : $x=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$ et $y=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ et $z=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$

D'où : $\boxed{H\left(\frac{5}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)}$

4) Calculons $d(\Omega;(ABC))$:

On a : $d(\Omega;(ABC))=\frac{|4+1+2-3|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{|4|}{3}=\frac{4}{3}$

Déduction :

Puisque $d(\Omega;(ABC))=\frac{4}{3}=R$ donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

5) Equation cartésienne du plan (Q) :

On a $(Q)\parallel(ABC)$ donc ils ont le même vecteur normal $\vec{n}(2;1;2)$; ainsi : $(Q): 2x+y+2z+c=0$

Or le plan (Q) est tangent à la sphère (S), donc :

$$d(\Omega;(Q))=\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{|4+1+2+c|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{|7+c|}{3}=\frac{4}{3} \Rightarrow |7+c|=4$$

$$\Rightarrow 7+c=4 \text{ ou } 7+c=-4 \Rightarrow c=-3 \text{ ou } c=-11$$

Puisque (Q) et strictement parallèle à (ABC) alors $c=-11$

D'où : $\boxed{(Q): 2x+y+2z-11=0}$

FB: révision bac science 2020

Scanned by DocumentScanner | Lufick